Exercice 2 7 points

Principaux domaines abordés : suites ; fonctions, fonction exponentielle.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Calculer u_1 puis u_2.
On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3}.

b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que `i` varie de 0 à `n -1`.

```
def   fonc (n):
      u =- 1
      for i in range(n) :
        u=u**3*exp(u)
      return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc (2)` arrondie à 10^{-3}.

2. **a.** Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x}(x+3)$.

b. Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-27\,\mathrm{e}^{-3}$	$\nearrow$	$+\infty$

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.$$

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

e. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Déterminer ℓ. (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\dfrac{1}{2}$).